試験問題用紙 (1 枚中の 1) **第1日**

第 35 回日本数学オリンピック代表選考合宿 2025 年 3 月 21 日 (金)

試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配　　点：各問 7 点

第 1 問　正の整数からなる空でない有限集合 $\mathcal{S}$ であって, 任意の $\mathcal{S}$ の要素 a, b に対して, ある $\mathcal{S}$ の要素 c が存在し, a が $b+2c$ を割りきるようなものをすべて求めよ.

第 2 問　三角形 ABC があり, その外接円を ω とする．辺 AB, AC 上 (端点を除く) にそれぞれ点 D, E があり, 三角形 ADE の外接円と ω が A でない点 P で交わっている．ω の A を含まない方の弧 BC の中点を M とし, 辺 BC と直線 MP の交点を Q とする．また, 直線 DM に関して B と対称な点を B', 直線 EM に関して C と対称な点を C' とする．このとき, B' と C' は異なり, これらは直線 BC に関して A と同じ側にあった．さらに, 三角形 DEM の外心を O とし, 線分 $B'C'$ を $BQ : CQ$ に内分する点を Q' とするとき, 直線 MO と直線 QQ' は平行であることを示せ．ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

第 3 問　n を 2 以上の整数とし, $n \times n$ のマス目がある．はじめ左上隅の 1 マスが黒く塗られており, そのほかのマスは白く塗られている．次の操作を繰り返し行うことで, すべてのマスが黒く塗られた状態にできるような n をすべて求めよ.

> 2×2 のマス目であって, そのうちちょうど 1 マスが黒く塗られているものを選び, 黒く塗られていない残りの 3 マスを黒く塗る.

以　上

第 35 回日本数学オリンピック代表選考合宿　　2025 年 3 月 22 日 (土)

試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配　　点：各問 7 点

第 4 問　n を正の整数とする．n 人の生徒が徒競走を n 回行った．それぞれの徒競走では，n 人全員に順位がつけられ，同じ順位となる 2 人はいなかった．ここで，正の整数の組 (a, b) に対し，生徒が**称号 (a, b)** をもつとは，その生徒が少なくとも a 回の徒競走で上位 b 人に含まれていることをいう．また，生徒の**得点**を，その生徒がもつすべての称号 (a, b) における $a - b$ の最大値として定める．このとき，n 人の生徒の得点の総和としてありうる最大の値を求めよ．

第 5 問　集合 $\{2^0, 2^1, 2^2, \ldots\}$ の部分集合 $\mathcal{S}$ であって，次の条件をみたすものをすべて求めよ．

> 正の整数に対して定義され正の整数値をとる関数 f であって，正の整数 a, b を用いて $f(a+b) - f(a) - f(b)$ と表される整数全体の集合が $\mathcal{S}$ と等しいようなものが存在する．

第 6 問　$AB < AC < BC$ をみたす三角形 ABC の内心を I とし，直線 AI, BI, CI と三角形 ABC の外接円の交点のうち，それぞれ A, B, C でない方を M_A, M_B, M_C とする．直線 AI と辺 BC が点 D で交わっており，半直線 BM_C と半直線 CM_B が点 X で交わっている．また，三角形 XBC の外接円と三角形 XM_BM_C の外接円が X でない点 S で交わっており，直線 BX, CX と三角形 SM_AX の外接円の交点のうち，X でない方をそれぞれ P, Q とする．このとき，三角形 DIS の外心は直線 PQ 上にあることを示せ．

ただし，UV で線分 UV の長さを表す．

以　上

試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配　　点：各問 7 点

第 7 問　正の整数からなる数列 $a_1, a_2, \ldots$ が, 任意の 2024 以上の整数 n に対して次をみたしている.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ のうち $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ 以上のものの平均値が a_{n+1} に等しい.

このとき, 任意の 2024 より大きい整数 n について $a_n = a_{2025}$ が成り立つことを示せ.

第 8 問　平面上にどの 3 点も同一直線上にないような相(あい)異なる 1000 個の点があり, これらを**良い点**とよぶ. 3 つの良い点を 3 頂点とする三角形 1 個と, その内部の良い点 1 つの組について, そのような組すべてを**美しい組**とよぶ. それぞれの良い点に実数を 1 つずつ割り当てる方法であって, 次の条件をともにみたすようなものが存在した.

- 異なる 2 つの良い点であって, 割り当てられた数が異なるようなものが存在する.
- 任意の美しい組に対し, 三角形の 3 頂点に割り当てられた実数の平均値と内部の良い点に割り当てられた実数が等しい.

このとき, 美しい組の個数としてありうる最大の値を求めよ.

第 9 問　正の整数に対して定義され正の整数値をとる関数 f であって, 任意の正の整数 m, n に対して, m と n が互いに素であることと,

$$f(mn)^2 = f\bigl(m^2\bigr) f\bigl(f(n)\bigr) f\bigl(mf(n)\bigr)$$

が成り立つことが同値となるようなものを考える. このとき, 正の整数 n それぞれについて, $f(n)$ としてありうる値をすべて求めよ.

以　上

試験問題用紙 (1 枚中の 1) **第4日**

第 35 回日本数学オリンピック代表選考合宿　　2025 年 3 月 24 日 (月)

試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配　　点：各問 7 点

第 10 問　円に内接する五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ がある. 1 以上 5 以下の整数 i について, 三角形 $A_iA_{i+2}A_{i-2}$ の内心を I_i とし, 直線 $A_{i+1}A_{i-2}$ と直線 $A_{i-1}A_{i+2}$ の交点を B_i とする. ただし, 整数 n に対し $A_n = A_{n+5}$ とする. 五角形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ が内接円をもつとき, 5 点 I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 は同一円周上にあることを示せ.

第 11 問　以下の条件をみたす正の整数 n をすべて求めよ.

> 任意の整数係数多項式 P に対して, ある整数係数 2 次多項式 Q が存在し, どの整数 k についても $Q(k)\bigl(P(k)+Q(k)\bigr)$ は n で割りきれない.

第 12 問　p, q を互いに素な相異なる正の整数とする. 正の整数からなる数列 $a_1, a_2, \ldots$ であって, 以下の条件がともに成り立つようなものをすべて求めよ.

- 任意の正の整数 n について, $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+p}$ のうち最大のものと最小のものの差は p に等しい.
- 任意の正の整数 n について, $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+q}$ のうち最大のものと最小のものの差は q に等しい.

以　上